

第二章 一元二次函数、方程和不等式

2.1 等式

基础必刷

1. D 【解析】对于选项 A, 由等式的性质知, 若 $x=y$, 则 $x+5=y+5$, A 正确;

对于选项 B, 若 $a^2=-2a$, 则 $a=-2$ 或 $a=0$, B 正确;

对于选项 C, 由等式的性质知, 若 $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$, 则 $a=b$, C 正确;

对于选项 D, 由等式的性质知, 若 $x=y$, 则 $\frac{x}{a}=\frac{y}{a}$ 的前提条件为 $a \neq 0$, D 不正确.

故选 D.

2. C 【解析】对于选项 A, $x^2-8xy+16y^2=x^2-2x \cdot 4y+(4y)^2=(x-4y)^2$, 故该选项正确, 不符合题意;

对于选项 B, $x(x-y)+y(y-x)=(x-y)^2$, 故该选项正确, 不符合题意;

对于选项 C, $x^2-4x-5=(x+1)(x-5)$, 故该选项不正确, 符合题意;

对于选项 D, $16x^4-1=(4x^2)^2-1=(4x^2+1)(4x^2-1)=(4x^2+1)(2x+1)(2x-1)$, 故该选项正确, 不符合题意. 故选 C.

3. C 【解析】将 $y=kx+1$ 代入 $y^2-4x=0$ 得 $k^2x^2+(2k-4)x+1=0$, 当 $k^2=0$ 即 $k=0$ 时, 方程为 $-4x+1=0$, 解得 $x=\frac{1}{4}$, 符合题意; 当 $k^2 \neq 0$ 即 $k \neq 0$ 时, 关于 x 的一元二次方程 $k^2x^2+(2k-4)x+1=0$ 只有一解, 所以 $\Delta=(2k-4)^2-4k^2=-16k+16=0$, 解得 $k=1$. 综上, $k=0$ 或 1 . 故选 C.

4. A 【解析】设每头牛值金 x 两, 每只羊值金 y 两,

$$\text{由题意可得} \begin{cases} 5x+2y=10, \\ 2x+5y=8, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x=\frac{34}{21}, \\ y=\frac{20}{21}, \end{cases}$$

所以每头牛值金 $\frac{34}{21}$ 两, 每只羊值金 $\frac{20}{21}$ 两.

故选 A.

5. D 【解析】由 $U=\{-1, 1, 2, 3\}$, $\complement_U M=\{-1, 1\}$, 得 $M=\{2, 3\}$, 所以 2, 3 为方程 $x^2+px+q=0$ 的两根, 所以 $\begin{cases} -p=2+3, \\ q=2 \times 3, \end{cases}$ 解得

拆逻辑: 2, 3 符合集合 M 中的描述, 即是 $x^2+px+q=0$ 的根

$$\begin{cases} p=-5, \\ q=6. \end{cases} \text{故 } p+q=-5+6=1. \text{ 故选 D.}$$

6. B 【解析】设公共实数根为 t ,

$$\text{则 } at^2+bt+c=0, bt^2+ct+a=0, ct^2+at+b=0,$$

$$\text{三式相加得 } (a+b+c)t^2+(a+b+c)t+a+b+c=0,$$

$$\text{即 } (a+b+c)(t^2+t+1)=0. \text{ 因为 } t^2+t+1=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0,$$

$$\text{所以 } a+b+c=0, \text{ 所以 } \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)+c^3}{abc}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(a+b)[(a+b)^2-3ab]+c^3}{abc} \\ &= \frac{-c(c^2-3ab)+c^3}{abc} = \frac{3abc}{abc} = 3. \end{aligned}$$

故选 B.

7. -1 【解析】 $\because (3, -2) \in \left\{ (x, y) \mid \begin{cases} ax+by=2, \\ bx+ay=-3 \end{cases} \right\}, \therefore \begin{cases} 3a-2b=2, \\ 3b-2a=-3, \end{cases}$ 两式相加可得 $a+b=-1$.

8. 【解】(1) 将 $2x-y=17$ 和 $3x+y=-2$ 两式相加得 $5x=15$, 解得 $x=3$, 再代入 $2x-y=17$ 中, 解得 $y=-11$.

$$\text{所以 } \begin{cases} 2x-y=17, \\ 3x+y=-2 \end{cases} \text{ 的解集为 } \{(3, -11)\}.$$

$$(2) \text{ 由 } x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=98, \text{ ①}$$

$$x^2y+xy^2=xy(x+y)=-30, \text{ ②}$$

$$\text{易知 } xy \neq 0, x+y \neq 0, \text{ 由 } \text{①} \div \text{②} \text{ 得 } \frac{x^2-xy+y^2}{xy} = -\frac{98}{30} = -\frac{49}{15},$$

$$\text{整理得 } 15x^2+34xy+15y^2=(5x+3y)(3x+5y)=0,$$

$$\text{所以 } x=-\frac{3}{5}y \text{ 或 } x=-\frac{5}{3}y.$$

$$\text{当 } x=-\frac{3}{5}y \text{ 时, 代入 } x^2y+xy^2=xy(x+y)=-30 \text{ 中, 得 } y^3=125, \text{ 所以 } y=5, x=-3;$$

$$\text{当 } x=-\frac{5}{3}y \text{ 时, 代入 } x^2y+xy^2=xy(x+y)=-30 \text{ 中, 得 } y^3=-27, \text{ 所以 } y=-3, x=5,$$

$$\text{所以方程组 } \begin{cases} x^3+y^3=98, \\ x^2y+xy^2=-30 \end{cases} \text{ 的解集为 } \{(-3, 5), (5, -3)\}.$$

方法精炼

求解高次方程时, 核心思想通常是降次, 将其转化为低次方程求解. 常用方法包括因式分解、公式法(如立方和、立方差公式等)、穿针引线法等.

易错专刷

易错点 1 求方程的解集时要注意方程解的特征

9. D 【解析】由 $\frac{m}{1-x}+2=\frac{3}{x-1}$ 去分母得 $-m+2(x-1)=3$, 解得 $x=$

$$\frac{m+5}{2}.$$

关于 x 的分式方程 $\frac{m}{1-x} + 2 = \frac{3}{x-1}$ 有正数解, 则 $\frac{m+5}{2} > 0$, 解得 $m > -5$.

又 $x=1$ 是增根, 当 $x=1$ 时, 由 $\frac{m+5}{2} = 1$, 得 $m = -3$, 所以 $m \neq -3$.

由根式 $\sqrt{2-m}$ 有意义, 得 $2-m \geq 0$, 解得 $m \leq 2$, 因此 $-5 < m \leq 2$ 且 $m \neq -3$.

又因为 m 为整数, 所以 m 可以为 $-4, -2, -1, 0, 1, 2$, 所以符合条件的整数 m 的和是 $(-4) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 = -4$. 故选 D.

易错警示 解分式方程容易出错的地方是忽略方程本身成立的条件, 本题是分母 $1-x \neq 0$ 且 $x-1 \neq 0$, 忽略此处易导致增根, 再一个容易出错的地方是去分母时会忘记 $1-x$ 与 $x-1$ 互为相反数, 出现去分母时丢掉负号的情况.

易错点 2 忽视一元二次方程有解的条件而致误

10. 【解】 (1) 当 $k = -2$ 时, 方程 $x^2 - (2k-1)x + k^2 + 1 = 0$ 可化为 $x^2 + 5x + 5 = 0$, 由 x_1, x_2 是方程 $x^2 + 5x + 5 = 0$ 的两个实数根, 得

$$x_1 + x_2 = -5, x_1 x_2 = 5, \text{ 且 } \Delta > 0,$$

$$\text{则 } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 25 - 10 = 15.$$

$$(2) \text{ 由题意得 } x_1 + x_2 = 2k-1, x_1 x_2 = k^2 + 1,$$

$$\text{则 } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{2k-1}{k^2+1} = -\frac{3}{2}, \text{ 整理得 } 3k^2 + 4k + 1 = (3k +$$

$$1)(k+1) = 0, \text{ 解得 } k = -\frac{1}{3} \text{ 或 } k = -1.$$

$$\text{由 } \Delta = (2k-1)^2 - 4(k^2+1) = -4k-3 \geq 0, \text{ 得 } k \leq -\frac{3}{4}, \text{ 所以 } k = -1.$$

易错警示 本题很容易忽视一元二次方程有解的条件, 即判别式大于等于 0, 还易误认为一元二次方程有两个实数根是两个不相等的实数根, 得出判别式大于 0 的错误结论, 而本题中一元二次方程有两个实数根, 可能是两个不相等的实数根, 还有可能是两个相等的实数根. 在利用根与系数的关系时, 也很容易在两根之和的记忆上出错, 出现把负号丢掉的情况.

2.2 不等式的性质

基础必刷

1. D 【解析】 由 $-a > -b > 0$ 知 $a < b < 0$, 所以 $|a| > |b|$, A 错误; 因为 $\frac{b}{a} - 1 = \frac{b-a}{a} < 0$, 所以 $\frac{b}{a} < 1$, B 错误; 因为 $-a > -b > 0$, 所以 $\sqrt{-a} > \sqrt{-b}$, C 错误; 因为 $ab - b^2 = b(a-b) > 0$, 所以 $ab > b^2$, D 正确. 故选 D.

方法精炼 作差法比较大小的步骤

先作差, 再对差值进行变形 (如通分、因式分解等) 以简化表达式, 然后根据变形结果的符号判断大小关系, 最后得出结论.

2. D 【解析】 由题意得 $\begin{cases} 170 < x+y \leq 190, \\ x > y. \end{cases}$ 故选 D.

3. A 【解析】 $\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = \frac{b-a}{(b-c)(c-a)}.$

因为 $a > b > c$, 所以 $b-a < 0, b-c > 0, c-a < 0$,

所以 $\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = \frac{b-a}{(b-c)(c-a)} > 0$. 故选 A.

4. B 【解析】 方法一: 令 $9x-y = m(x-y) + n(4x-y)$,

$$\text{则 } \begin{cases} m+4n=9, \\ -m-n=-1, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} m=-\frac{5}{3}, \\ n=\frac{8}{3}. \end{cases}$$

$$\therefore -4 \leq x-y \leq -1, -1 \leq 4x-y \leq 5,$$

$$\therefore \frac{5}{3} \leq -\frac{5}{3}(x-y) \leq \frac{20}{3}, -\frac{8}{3} \leq \frac{8}{3}(4x-y) \leq \frac{40}{3},$$

$$\therefore -1 \leq -\frac{5}{3}(x-y) + \frac{8}{3}(4x-y) \leq 20, \text{ 即 } -1 \leq 9x-y \leq 20.$$

$$\text{方法二: 令 } m=x-y, n=4x-y, \text{ 则 } \begin{cases} x=\frac{n-m}{3}, \\ y=\frac{n-4m}{3}, \end{cases}$$

$$\text{则 } 9x-y = \frac{8}{3}n - \frac{5}{3}m.$$

$$\therefore -4 \leq m \leq -1, \therefore \frac{5}{3} \leq -\frac{5}{3}m \leq \frac{20}{3},$$

$$\therefore -1 \leq n \leq 5, \therefore -\frac{8}{3} \leq \frac{8}{3}n \leq \frac{40}{3}.$$

$$\therefore -1 \leq \frac{8}{3}n - \frac{5}{3}m \leq 20, \text{ 即 } -1 \leq 9x-y \leq 20.$$

故选 B.

5. ACD 【解析】 对于 A, $\because b > a > 0, m > 0, \therefore \frac{b}{a} - \frac{b+m}{a+m} =$

$$\frac{b(a+m)-a(b+m)}{a(a+m)} = \frac{m(b-a)}{a(a+m)} > 0, \text{ 即 } \frac{b}{a} > \frac{b+m}{a+m}, \text{ 故 A 正确;}$$

对于 B, 当 $a=4, b=2, m=-1$ 时, $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}, \frac{b+m}{a+m} = \frac{1}{3} < \frac{b}{a}$, 故 B

错误; **拆逻辑:** 只需要举出一个特例即可说明不等式不成立

对于 C, 由题意得 $a+b > c$, 则 $a+b-c > 0, \therefore \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} > \frac{a}{1+a+b} +$

$$\frac{b}{1+a+b} = \frac{a+b}{1+a+b},$$

又 $\frac{c}{1+c} < \frac{c+(a+b-c)}{1+c+(a+b-c)} = \frac{a+b}{1+a+b}$, $\therefore \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} > \frac{c}{1+c}$, 故 C 正确;

对于 D, 由题意得 $b+c>a>0, a+c>b>0, a+b>c>0$, $\therefore \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c}$

$\frac{c}{a+b} < \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+c} + \frac{2c}{a+b+c} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2$, 故 D 正确. 故

选 ACD.

6. 【证明】(1) 因为 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = a+b+2\sqrt{ab}$, $(\sqrt{c}+\sqrt{d})^2 = c+d+2\sqrt{cd}$,

且 $a+b=c+d, ab>cd>0$, 所以 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 > (\sqrt{c}+\sqrt{d})^2$.

又 $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0, \sqrt{c}+\sqrt{d}>0$, 所以 $\sqrt{a}+\sqrt{b} > \sqrt{c}+\sqrt{d}$.

(2) ①若 $|a-b| < |c-d|$, 则 $(a-b)^2 < (c-d)^2$.

【重点】常用平方消去绝对值号

即 $(a+b)^2 - 4ab < (c+d)^2 - 4cd$.

因为 $a+b=c+d$, 所以 $ab>cd$, 由(1)得 $\sqrt{a}+\sqrt{b} > \sqrt{c}+\sqrt{d}$.

②若 $\sqrt{a}+\sqrt{b} > \sqrt{c}+\sqrt{d}$, 则 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 > (\sqrt{c}+\sqrt{d})^2$,

即 $a+b+2\sqrt{ab} > c+d+2\sqrt{cd}$.

因为 $a+b=c+d$, 所以 $ab>cd$,

于是 $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab < (c+d)^2 - 4cd = (c-d)^2$.

因此 $|a-b| < |c-d|$.

综上, $\sqrt{a}+\sqrt{b} > \sqrt{c}+\sqrt{d}$ 的充要条件是 $|a-b| < |c-d|$.

易错专刷

易错点 1 不能正确理解不等式的性质而致误

7. ACD 【解析】对于 A, 取 $a=-2, b=1$, 可知 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ 不成立, 因

此选项 A 不正确;

对于 B, $\because a>b>0, \therefore \frac{b+1}{a+1} - \frac{b}{a} = \frac{a-b}{a(a+1)} > 0, \therefore \frac{b+1}{a+1} > \frac{b}{a}$, 因此选

项 B 正确;

对于 C, 取 $a=b=1$, 则 $ab=1$, 因此选项 C 不正确;

对于 D, 取 $b=0$, 则 $cb^2=ab^2$, 因此选项 D 不正确.

故选 ACD.

易错警示

使用不等式性质时, 一定要注意不等式性质的使用条件, 如不等式两边同乘一个数, 不等式符号不改变的条件是这个数大于 0.

易错点 2 使用不等式性质时, 非等价变形而致误

8. 【解】(1) 由 $1 \leq a+b \leq 8, 3 \leq a-b \leq 4$, 得 $4 \leq (a+b) + (a-b) \leq 12$,

即 $4 \leq 2a \leq 12$, 所以 $2 \leq a \leq 6$.

因为 $b = \frac{1}{2}[(a+b) - (a-b)] = \frac{1}{2}[(a+b) + (b-a)]$,

又 $3 \leq a-b \leq 4$, 所以 $-4 \leq b-a \leq -3$.

又 $1 \leq a+b \leq 8$,

所以 $-3 \leq (a+b) - (a-b) \leq 5$,

所以 $-\frac{3}{2} \leq \frac{1}{2}[(a+b) - (a-b)] \leq \frac{5}{2}$, 即 $-\frac{3}{2} \leq b \leq \frac{5}{2}$,

故实数 a 的取值范围为 $\{a | 2 \leq a \leq 6\}$, 实数 b 的取值范围

为 $\left\{b \mid -\frac{3}{2} \leq b \leq \frac{5}{2}\right\}$.

(2) 设 $2a-5b = m(a+b) + n(a-b) = (m+n)a + (m-n)b$,

$$\text{则} \begin{cases} m+n=2, \\ m-n=-5, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} m=-\frac{3}{2}, \\ n=\frac{7}{2}, \end{cases} \text{所以 } 2a-5b = -\frac{3}{2}(a+b) + \frac{7}{2}(a-b).$$

又 $1 \leq a+b \leq 8, 3 \leq a-b \leq 4$,

所以 $-12 \leq -\frac{3}{2}(a+b) \leq -\frac{3}{2}, \frac{21}{2} \leq \frac{7}{2}(a-b) \leq 14$,

故 $-\frac{3}{2} \leq 2a-5b \leq \frac{25}{2}$,

即 $2a-5b$ 的取值范围为 $\left\{2a-5b \mid -\frac{3}{2} \leq 2a-5b \leq \frac{25}{2}\right\}$.

易错警示

利用不等式的性质求取值范围, 要建立待求范围的整体与已知范围的整体关系, 最后利用不等式的性质进行运算, 求得待求的范围. 同向不等式的两边可以相加, 这种转化不一定是等价变形, 如果在解题过程中多次使用这种转化, 就有可能扩大其取值范围造成错误, 例如本题如果直接用(1)问中 a, b 的取值范围来求解, 会扩大 $2a-5b$ 的取值范围.

2.3 基本不等式

基础必刷

1. C 【解析】对于 A, 若 $a=-1, b=-2$, 则满足 $ab>0$, 且 $a>b$, 而 $a^2=1, b^2=4, a^2 < b^2$, 所以 A 错误;

对于 B, 若 $a=-1, b=-2$, 则满足 $ab>0$, 且 $a>b$, 而 $\frac{1}{a} = -1$,

$\frac{1}{b} = -\frac{1}{2}, \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, 所以 B 错误;

对于 C, 因为 $ab>0$, 所以 $\frac{b}{a} > 0, \frac{a}{b} > 0$, 所以 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq$

$2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 2$, 当且仅当 $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$, 即 $a=b$ 时取等号, 而 $a>$

b , 所以取不到等号, 所以 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} > 2$, 所以 C 正确;

对于 D, 若 $a=-1, b=-2$, 则满足 $ab>0$, 且 $a>b$, 而 $\frac{a+b}{2} =$

$-\frac{3}{2}, \sqrt{ab}=\sqrt{2}, \frac{a+b}{2}<\sqrt{ab}$, 所以 D 错误.

故选 C.

2. A 【解析】因为 $m<10$, 所以 $10-m>0$,

所以 $m+\frac{9}{m-10}=m-10+\frac{9}{m-10}+10=10-\left(10-m+\frac{9}{10-m}\right)\leq 10-$

$2\sqrt{(10-m)\cdot\frac{9}{10-m}}=10-6=4$, 当且仅当 $10-m=\frac{9}{10-m}$,

即 $m=7$ 时取等号. 故选 A.

3. B 【解析】由题意得 $x+3y=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{y}\right)(x+3y)=$

$\frac{1}{2}\left(\frac{3y}{x}+\frac{3x}{y}+1+9\right)\geq\frac{1}{2}\left(2\sqrt{\frac{3y}{x}\cdot\frac{3x}{y}}+10\right)=8$, 当且仅当

$\frac{3y}{x}=\frac{3x}{y}$, 且 $\frac{1}{x}+\frac{3}{y}=2$, 即 $x=y=2$ 时取等号, 所以 $x+3y$ 的最

小值为 8. 故选 B.

4. C 【解析】由题图可知, $OF=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}(a+b)$, $OC=\frac{1}{2}(a+$

$b)-b=\frac{1}{2}(a-b)$.

在 $\text{Rt}\triangle OCF$ 中, 由勾股定理可得 $CF=\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}=$

$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\therefore CF\geq OF, \therefore \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{1}{2}(a+b)$. 故选 C.

5. A 【解析】 $\frac{x^2-x+14}{x+1}=\frac{(x+1)^2-3(x+1)+16}{x+1}=x+1+\frac{16}{x+1}-3$.

因为 $x<-1$, 所以 $x+1<0$, 所以 $-(x+1)>0$,

→【防区】: 运用基本不等式要保证各项必须为正数, 否则无法使用

则 $x+1+\frac{16}{x+1}=-\left[-(x+1)+\left(-\frac{16}{x+1}\right)\right]\leq -8$,

当且仅当 $-(x+1)=-\frac{16}{x+1}$, 即 $x=-5$ 时, 等号成立.

故 $x+1+\frac{16}{x+1}-3\leq -11$, 则 $\frac{x^2-x+14}{x+1}$ 的最大值是 -11. 故选 A.

6. C 【解析】对于 A, 当 $a=4, b=4$ 时, 满足 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leq 1$, 但 $a+$

$b\leq 4$ 不成立, 故 A 错误.

对于 B, 当 $a=4, b=4$ 时, 满足 $\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}\geq 4$, 但 $a+b\leq 4$ 不成立, 故 B 错误.

对于 C, 由 $a^2+b^2\leq 8$ 可得 $\frac{(a+b)^2}{2}\leq a^2+b^2\leq 8$, 则 $a+b\leq 4$, 即充分性成立; 当 $a=3, b=1$ 时, 满足 $a+b\leq 4$, 但 $a^2+b^2\leq 8$ 不成立, 即必要性不成立, 故 C 正确.

对于 D, 当 $a=4, b=1$ 时, 满足 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 4$ 成立, 但 $a+b\leq 4$ 不

成立, 故 D 错误.

故选 C.

7. BCD 【解析】因为 $x>0, y>0$, 且 $x+y+xy-3=0$,

对于选项 A: 由题意可得 $x+y=3-xy\geq 2\sqrt{xy}$, 即 $xy+2\sqrt{xy}-3\leq 0$, 又 $\sqrt{xy}>0$, 解得 $0<\sqrt{xy}\leq 1$, 当且仅当 $x=y=1$ 时, 等号成立, 则 $0<xy\leq 1$, 故 A 错误.

对于选项 B: 因为 $0<xy\leq 1$, 所以 $2\leq 3-xy<3$, 即 $2\leq x+y<3$, 故 B 正确.

对于选项 C: 由 $x+y+xy-3=0$, 可得 $(x+1)(y+1)=4$, 则

→【拆逻辑】: 利用因式分解配凑积为定值

$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{y+1}\geq 2\sqrt{\frac{1}{x+1}\cdot\frac{2}{y+1}}=\sqrt{2}$, 当且仅当 $\frac{1}{x+1}=\frac{2}{y+1}$, 即 $x=$

$\sqrt{2}-1, y=2\sqrt{2}-1$ 时, 等号成立, 所以 $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{y+1}$ 的最小值为

$\sqrt{2}$, 故 C 正确.

对于选项 D: 由 C 知 $(x+1)(y+1)=4$, 则 $x+2y=(x+1)+2(y+1)-3\geq 2\sqrt{(x+1)(y+1)}-3=4\sqrt{2}-3$, 当且仅当 $x+1=2(y+1)$, 即 $x=2\sqrt{2}-1, y=\sqrt{2}-1$ 时, 等号成立, 所以 $x+2y$ 的最小值是 $4\sqrt{2}-3$, 故 D 正确. 故选 BCD.

8. 25 【解析】由 $x+y=7$, 得 $(x+1)+(y+2)=10$, 则 $(1+x)(2+y)\leq \left[\frac{(1+x)+(2+y)}{2}\right]^2=25$, 当且仅当 $1+x=2+y$, 即 $x=4, y=$

3 时取等号, 所以 $(1+x)(2+y)$ 的最大值为 25.

一题多解

因为 $x+y=7$, 所以 $y=7-x$, 则 $(1+x)(2+y)=(1+x)(2+7-x)=(1+x)(9-x)=-x^2+8x+9=-(x-4)^2+25$. 又因为 $x>0, y=7-x>0$, 所以 $0<x<7$, 则结合二次函数图象可知当 $x=4$ 时, $-(x-4)^2+25$ 取到最大值 25, 即 $(1+x)(2+y)$ 的最大值为 25.

9. 【解】(1) 如图, $AB=x$ cm, 由矩形

$ABCD(AB>AD)$ 的周长为 16 cm, 可知

$AD=(8-x)$ cm, 设 $PC=a$ cm, 则

$DP=(x-a)$ cm,

$\therefore \angle APD = \angle CPB', \angle ADP =$

$\angle CB'P=90^\circ, AD=CB'$,

$\therefore \text{Rt}\triangle ADP \cong \text{Rt}\triangle CB'P, \therefore AP=PC=a$ cm,

在 $\text{Rt}\triangle ADP$ 中, 由勾股定理得 $AD^2+DP^2=AP^2$, 即 $(8-x)^2+$

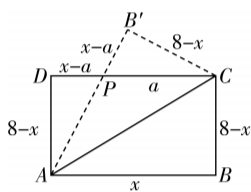
$(x-a)^2=a^2$, 解得 $a=\frac{x^2-8x+32}{x}$,

$\therefore DP=x-a=\frac{8x-32}{x}$, 即 $y=\frac{8x-32}{x}(4<x<8)$.

(2) $\triangle ADP$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}AD\cdot DP=\frac{1}{2}(8-x)\cdot\frac{8x-32}{x}=4\times$

$\frac{-x^2+12x-32}{x}=4\left[-\left(x+\frac{32}{x}\right)+12\right]\leq 4\times\left(-2\sqrt{x\cdot\frac{32}{x}}+12\right)=$

$48-32\sqrt{2}$,



当且仅当 $x = \frac{32}{x}$, 即 $x = 4\sqrt{2}$ cm 时, $\triangle ADP$ 的面积最大, 最大面积为 $(48 - 32\sqrt{2}) \text{ cm}^2$.

10. (1) 【证明】方法一: $(a+b)(c+d) - (\sqrt{ac} + \sqrt{bd})^2 = ac + bd + ad + bc - (ac + bd + 2\sqrt{adbc}) = ad - 2\sqrt{adbc} + bc = (\sqrt{ad} - \sqrt{bc})^2 \geq 0$, $\therefore (a+b)(c+d) \geq (\sqrt{ac} + \sqrt{bd})^2$.

方法二: $\because a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$, $\therefore (a+b)(c+d) = ac + bd + ad + bc = (\sqrt{ac})^2 + (\sqrt{bd})^2 + ad + bc \geq (\sqrt{ac})^2 + (\sqrt{bd})^2 + 2\sqrt{adbc} = (\sqrt{ac} + \sqrt{bd})^2$, 当且仅当 $ad = bc$ 时, 等号成立, $\therefore (a+b)(c+d) \geq (\sqrt{ac} + \sqrt{bd})^2$.

(2) 【解】由 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{2m+2}{m}$ 恒成立, 知 $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)_{\min} \geq \frac{2m+2}{m}$, $\because x+y=1, x>0, y>0$, $\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot (x+y) = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} + 2 \geq 2\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y}} + 2 = 4$, 当且仅当 $\frac{y}{x} = \frac{x}{y}$, 即 $x=y=\frac{1}{2}$ 时, 等号成立, 即 $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)_{\min} = 4$, $\therefore \frac{2m+2}{m} \leq 4$, 解得 $m \geq 1$ 或 $m < 0$. $\therefore m$ 的取值范围为 $\{m | m \geq 1 \text{ 或 } m < 0\}$.

高手视角 将恒成立问题转化为 $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)_{\min} \geq \frac{2m+2}{m}$, 应用“1”的代换及基本不等式求 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值, 可得 $\frac{2m+2}{m} \leq 4$, 再解不等式求出参数的取值范围.

易错专训

易错点 1 注意应用基本不等式时要满足的条件

11. $\{y | y \geq 4 \text{ 或 } y \leq -4\}$ 【解析】当 $x > 0$ 时, $y = x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 4$, 当且仅当 $x = \frac{4}{x}$, 即 $x = 2$ 时取等号; 当 $x < 0$ 时, $\therefore y = x + \frac{4}{x}$, $\therefore -y = (-x) + \left(-\frac{4}{x}\right) \geq 2\sqrt{(-x) \cdot \left(-\frac{4}{x}\right)} = 4$, 即 $-y \geq 4$, $\therefore y \leq -4$, 当且仅当 $-x = -\frac{4}{x}$, 即 $x = -2$ 时取等号. 综上, y 的取值范围是 $\{y | y \geq 4 \text{ 或 } y \leq -4\}$.

易错警示 本题中由于 x 的范围不确定, 因此求解时要按照 x 值的正、负分类讨论, 本题的易错之处是忽视 x 的范围, 直接误认为 $x > 0$, 然后使用基本不等式而造成错解. 因此使用基本不等式时一定要注意条件中的“正数”.

12. $\frac{5}{4}$ 【解析】 $a\sqrt{1+b^2} = 2\sqrt{a^2 \cdot \frac{1+b^2}{4}} \leq a^2 + \frac{1+b^2}{4}$. $\therefore a^2 + \frac{b^2}{4} = 1$, $\therefore a^2 + \frac{1+b^2}{4} = \frac{5}{4}$, $\therefore a\sqrt{1+b^2} \leq \frac{5}{4}$,

当且仅当 $a^2 = \frac{1+b^2}{4}$, 即 $a = \frac{\sqrt{10}}{4}, b = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 时取等号.

易错警示

使用基本不等式求最值时, 不但要满足各式为正数, 还要满足等号成立. 求解本题时容易产生以下错解: $a\sqrt{1+b^2} \leq \frac{a^2+1+b^2}{2}$, 由 $a^2 + \frac{b^2}{4} = 1$ 知 $b^2 = 4 - 4a^2$, 所以 $\frac{a^2+1+b^2}{2} = \frac{a^2+1+4-4a^2}{2} = \frac{5-3a^2}{2} \leq \frac{5}{2}$, 即 $a\sqrt{1+b^2} \leq \frac{5}{2}$. 产生错解的原因是两个不等式取等号的条件不一样, 当 $\frac{5-3a^2}{2} \leq \frac{5}{2}$ 成立时, 取等号的条件是 $a = 0$, 此时 $b = 2$, 这与 $a\sqrt{1+b^2} \leq \frac{a^2+1+b^2}{2}$ 取等号的条件是矛盾的.

易错点 2 多次使用基本不等式而致误

13. (1) 5 (2) $\frac{17}{4}$ 【解析】(1) $\because x > 0, y > 0, x+y=1$, $\therefore m = x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} = x + \frac{x+y}{x} + y + \frac{x+y}{y} = 3 + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \geq 3 + 2 = 5$, 当且仅当 $x=y=\frac{1}{2}$ 时取等号.

(2) $\because x > 0, y > 0$, 且 $x+y=1$, $\therefore 1 = x+y \geq 2\sqrt{xy}$,

$\therefore xy \leq \frac{1}{4}$, 当且仅当 $x=y=\frac{1}{2}$ 时取等号,

$\therefore \sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}$.

$t = xy + \frac{1}{xy} = \left(\sqrt{xy} - \frac{1}{\sqrt{xy}}\right)^2 + 2$.

又 $\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}$, $\therefore \frac{1}{\sqrt{xy}} \geq 2$, $\therefore -\frac{1}{\sqrt{xy}} \leq -2$,

$\therefore \left(\sqrt{xy} - \frac{1}{\sqrt{xy}}\right)^2 + 2 \geq \left(\frac{1}{2} - 2\right)^2 + 2 = \frac{17}{4}$, 当且仅当 $x=y=\frac{1}{2}$ 时取等号.

故 $t = xy + \frac{1}{xy}$ 的最小值为 $\frac{17}{4}$.

易错警示

(1) 本题易错之处是误认为 $x + \frac{1}{x} \geq 2, y + \frac{1}{y} \geq 2$, 则 $m = x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} \geq 4$, 产生错误的原因是两个不等式取等号的条件是 $x=y=1$, 这与已知条件矛盾.

(2) 本题容易产生以下错解: $xy + \frac{1}{xy} \geq 2$, 当且仅当 $xy=1$ 时取等号. 而由 $x+y=1$ 可知 $xy \leq \frac{1}{4}$, 不仅两次使用基本不等式取等号的条件不一致, 而且 $xy=1$ 也不满足 $xy \leq \frac{1}{4}$, 因此这种解法是错误的.

2.4 二次函数与一元二次方程、不等式

2.4.1 一元二次函数

基础必刷

1. D 【解析】当 $b=0, a=0$ 时, $y=c$ 不是二次函数, 故 A 错误; 当 $c=0, a=0$ 时, $y=bx$ 不是二次函数, 故 B 错误; 当 $a=0, b=0$ 时, $y=c$ 不是一次函数, 故 C 错误. 故选 D.

2. B 【解析】当 $x=0$ 时, $y=a-3$, 因为函数 $y=x^2-2x+a-3$ 的图象与 y 轴正半轴相交, 所以 $a-3>0$, 即 $a>3$, 则“ $a>3$ ”是“ $a>m$ ”的必要不充分条件, 即 $\{a|a>m\}$ 是 $\{a|a>3\}$ 的真子集, 所以 $m>3$. 故选 B.

3. D 【解析】根据题图知 $a<0$, 因为二次函数的图象过点 $B(0,1)$, 所以 $c=1$, 又其顶点在第一象限, 所以对称轴直线 $x=-\frac{b}{2a}>0$, 则 $ab<0$, 即 $abc<0$, 故①正确; 二次函数图象过点 $A(-1,0)$, 所以 $a-b+c=a-b+1=0$, 则 $a=b-1$, 又 $a<0, ab<0$, 所以 $b>0$, 则 $-1<a<0$, 故②正确; 由 $a-b+1=0$, 得 $b=a+1$, 又 $-1<a<0$, 所以 $0<b<1$, 故③正确; $a+b+c=2b$, 所以 $0<a+b+c<2$, 故④正确. 故选 D.

4. D 【解析】设灯具商店销售节能灯每月的利润为 W 元, 则 $W=(x-8)(-8x+400)=-8x^2+464x-3200=-8(x^2-58x)-3200=-8(x-29)^2+3528(x \in \mathbf{N})$, 故当 $x=29 \in \mathbf{N}$ 时, W 的最大值为 3 528, 所以灯具商店销售节能灯每月的最大利润为 3 528 元. 故选 D.

5. D 【解析】将二次函数 $y=(x+1)(x-3)+3$ 的图象沿 y 轴向下平移 3 个单位长度后所得图象的函数解析式为 $y=(x+1)(x-3)+3-3$, 即 $y=(x+1)(x-3)$, 此抛物线与 x 轴的两个交点的坐标分别为 $(-1,0), (3,0)$, 则此抛物线与 x 轴的两个交点之间的距离为 $3-(-1)=4$. 故选 D.

6. B 【解析】由题意得方程 $x^2+2(p-1)x+p^2-p=0$ 的两个不相等的实根为 x_1, x_2 , 所以 $x_1+x_2=-2(p-1), x_1 \cdot x_2=p^2-p$, 则 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=4(p-1)^2-2(p^2-p)=12$, 整理得到 $p^2-3p-4=0$, 解得 $p=-1$ 或 $p=4$. 又由 $\Delta=4(p-1)^2-4(p^2-p)>0$, 得 $p<1$, 所以 $p=-1$, 故选 B.

⚡ 防区: 不要忽视一元二次方程有两个不相等的实数根时判别式大于 0

7. C 【解析】由题中反比例函数的图象知 $k<0$, 则函数 $y=kx^2-2x+k^2$ 的图象开口向下, 且对称轴为直线 $x=-\frac{-2}{2k}=\frac{1}{k}<0$, 则当 $x=\frac{1}{k}$ 时, $y=k \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^2-2 \cdot \frac{1}{k}+k^2=k^2-\frac{1}{k}>0$, 则图象的顶点 $\left(\frac{1}{k}, k^2-\frac{1}{k}\right)$ 在第二象限. 故选 C.

8. D 【解析】由题表可得, 该函数图象的对称轴是直线 $x=\frac{0+3}{2}=\frac{3}{2}$, y 值先增后减且有最大值, 则函数图象开口向下, 故 A 错

误; 函数图象与 y 轴的交点为 $(0,1)$, 故 B 错误; 由对称性可知 $x=-1$ 和 $x=4$ 时的函数值相等, 则当 $x=4$ 时, $y=-3<0$, 故 C 错误; 由题表可知, 方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根在 -1 与 0 之间, 根据函数图象的对称轴为直线 $x=\frac{3}{2}$ 可知, 方程 $ax^2+bx+c=0$ 的正根在 3 与 4 之间, 故 D 正确. 故选 D.

9. $x=-2$ 【解析】 $\because$ 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a \neq 0)$ 的图象与 x 轴的两个交点的横坐标分别为 $x_1=\frac{-8+\sqrt{8^2-4 \times 2 \times 3}}{2 \times 2}, x_2=\frac{-8-\sqrt{8^2-4 \times 2 \times 3}}{2 \times 2}$, $\therefore$ 此二次函数图象的对称轴方程为 $x=\frac{1}{2}(x_1+x_2)=-2$.

10. $\frac{9}{2}$ 【解析】已知 $y=\frac{1}{2}x+1$, 令 $x=0$ 得 $y=1$, 令 $y=0$ 得 $x=-2$, 则 $A(-2,0), B(0,1)$, 将 $B(0,1), D(1,0)$ 代入 $y=\frac{1}{2}x^2+bx+c$

中得 $\begin{cases} c=1, \\ b+c+\frac{1}{2}=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} b=-\frac{3}{2}, \\ c=1, \end{cases}$ 所以二次函数的解析式为 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+1$. 画出函数的图象如图所示.

因为点 C 为 $y=\frac{1}{2}x+1$ 与 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+1$ 的图象的交点, 所以由 $\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+1=\frac{1}{2}x+1$, 解得 $x_1=0, x_2=4$, 又因为 C 在第一象限, 所以 $x_c=4$, 代入 $y=\frac{1}{2}x+1$ 中得 $y_c=3$, 所以点 C 的坐标为 $(4,3)$.

已知 D 点的坐标为 $(1,0)$, 根据二次函数图象的对称性得 $E(2,0)$.

$S_{\text{四边形}BDEC}=S_{\triangle ACE}-S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2} \cdot AE \cdot |y_c|-\frac{1}{2} \cdot AD \cdot OB=\frac{1}{2} \times 4 \times 3-\frac{1}{2} \times 3 \times 1=\frac{9}{2}$.

11. 【解】(1) 设函数 $y=x^2-2mx+m+2$, 易知该函数的图象开口向上, 对称轴为直线 $x=m$, 要使方程 $x^2-2mx+m+2=0$ 有一个正根一个负根, 则需使对应函数的图象与 x 轴的正负半轴各有一个交点, 如图, 故当 $x=0$ 时, $y=m+2<0$, 即 $m<-2$. 又 $\Delta=4m^2-4(m+2)>0$, 解得 $m>2$ 或 $m<-1$, 则 $m<-2$.

故 m 的取值范围为 $\{m|m < -2\}$.

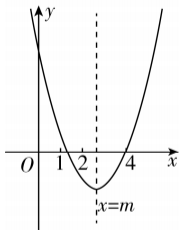
(2) 要使方程的两根均大于 1, 如图需使对应的函数 $y = x^2 - 2mx + m + 2$ 在 $x = 1$ 时的值大于 0, 且图象的对称轴直线

$$x = m > 1, \text{ 即 } \begin{cases} 3 - m > 0, \\ m > 1, \end{cases} \text{ 解得 } 1 < m < 3.$$

又 $\Delta = 4m^2 - 4(m + 2) \geq 0$, 解得 $m \geq 2$ 或 $m \leq -1$, 则 $2 \leq m < 3$.

⚡ **防区:** 两个根都大于 1 不要忽略两个根相等的情况

故 m 的取值范围为 $\{m|2 \leq m < 3\}$.



易错专刷

易错点 二次项系数为参数时忽视讨论致误

12. -1 或 2 或 1 【解析】函数 $y = (a-1)x^2 - 4x + 2a$ 的图象与 x 轴有且只有一个交点.

当函数为二次函数时, $a-1 \neq 0$, 且 $\Delta = 16 - 4 \times (a-1) \times 2a = 0$, 解得 $a_1 = -1, a_2 = 2$;

当函数为一次函数时, $a-1 = 0$, 解得 $a = 1$.

故实数 a 的值为 -1 或 2 或 1.

易错警示

由于本题中没有说明函数 $y = (a-1)x^2 - 4x + 2a$ 是二次函数, 因此应考虑该函数为一次函数的特殊情况, 本题的易错之处是误认为函数是二次函数而漏解.

13. $\{m|m \geq -1\}$ 【解析】函数 $y = mx^2 + 2x - 1$ 的图象与 x 轴有交点, 当 $m = 0$ 时, 显然成立; 当 $m \neq 0$ 时, $\Delta = 4 + 4m \geq 0$, 解得 $m \geq -1$ 且 $m \neq 0$. 故实数 m 的取值范围是 $\{m|m \geq -1\}$.

易错警示

本题的易错之处有两个: 一是误认为 $m \neq 0$; 二是二次函数的图象与 x 轴有交点包含有一个交点和有两个交点两种情况, 因此二次函数对应方程的判别式 $\Delta \geq 0$, 而不是 $\Delta > 0$.

2.4.2 一元二次不等式的解法

基础必刷

1. C 【解析】当 $a = 0$ 时, $② a^2 x^2 + 2 \geq 0$ 不是一元二次不等式, $③$ 是分式不等式, 只有 $①④⑤$ 是一元二次不等式. 故选 C.

2. C 【解析】在不等式组 $\begin{cases} x^2 - 1 < 0, ① \\ x^2 - 3x \geq 0 ② \end{cases}$ 中,

不等式 $①$ 的解集为 $\{x|-1 < x < 1\}$, 不等式 $②$ 的解集为 $\{x|x \leq 0$ 或 $x \geq 3\}$.

所以不等式组的解集为 $\{x|x \leq 0$ 或 $x \geq 3\} \cap \{x|-1 < x < 1\} = \{x|-1 < x \leq 0\}$. 故选 C.

3. D 【解析】 $x^2 - (a+3)x + 3a < 0 \Rightarrow (x-3)(x-a) < 0$,

当 $a = 3$ 时, 原不等式的解集为空集, 不符合题意;

当 $a > 3$ 时, 原不等式的解集为 $\{x|3 < x < a\}$, 因为原不等式恰有两个整数解, 所以这两个整数解一定为 4, 5, 因此 $5 < a \leq 6$;

当 $a < 3$ 时, 原不等式的解集为 $\{x|a < x < 3\}$, 因为原不等式恰有两个整数解, 所以这两个整数解一定为 1, 2, 因此 $0 \leq a < 1$.

综上所述, 实数 a 的取值范围为 $\{a|0 \leq a < 1$ 或 $5 < a \leq 6\}$, 故选 D.

方法精梳

对含参数的二次型不等式的常见讨论标准:

①二次项系数是否为 0; ②所对应的二次函数图象的开口方向; ③所对应的一元二次方程根的个数; ④所对应的一元二次方程的根的大小.

4. B 【解析】由关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c \leq 0$ 的解集为 $\{x|x \leq -2$ 或 $x \geq 1\}$, 可知 $a < 0$, 且 -2 和 1 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的

$$\text{两根, 故由根与系数的关系得 } \begin{cases} -2+1 = -\frac{b}{a}, \\ -2 \times 1 = \frac{c}{a}, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} b = a, \\ c = -2a, \end{cases} \text{ 故}$$

不等式 $cx^2 + bx + a < 0$ 即为 $-2ax^2 + ax + a < 0$, 又 $a < 0$, 不等式可化为 $2x^2 - x - 1 < 0$, 解得 $-\frac{1}{2} < x < 1$, 故选 B.

5. BCD 【解析】当 $k = 1$ 时, 由 $2kx^2 + kx - \frac{3}{8} = 2x^2 + x - \frac{3}{8} < 0$, 解

得 $-\frac{3}{4} < x < \frac{1}{4}$, 故 A 错误;

若不等式对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 则当 $k = 0$ 时, $-\frac{3}{8} < 0$ 恒成立,

当 $k \neq 0$ 时, $2k < 0$, 且 $\Delta = k^2 - 4 \times 2k \times \left(-\frac{3}{8}\right) < 0$, 解得 $-3 < k < 0$,

综上, $-3 < k \leq 0$, 则整数 k 的取值集合为 $\{-2, -1, 0\}$, 故 B 正确;

不等式对 $0 \leq k \leq 1$ 恒成立, 即 $(2x^2 + x)k - \frac{3}{8} < 0$ 对 $0 \leq k \leq 1$ 恒成立,

$$\text{则 } \begin{cases} (2x^2 + x) \times 1 - \frac{3}{8} < 0, \\ (2x^2 + x) \times 0 - \frac{3}{8} < 0, \end{cases} \text{ 解得 } -\frac{3}{4} < x < \frac{1}{4}, \text{ 故 C 正确;}$$

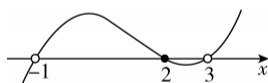
若恰有一个整数 x 使得不等式成立, 则 $k > 0$, 又因为 $-\frac{3}{8} <$

0 , 且抛物线 $y = 2kx^2 + kx - \frac{3}{8}$ 的对称轴为直线 $x = -\frac{k}{4k} =$

$-\frac{1}{4}$, 所以该整数解为 $x = 0$,

结合二次函数 $y=2kx^2+kx-\frac{3}{8}$ 的图象,可得
$$\begin{cases} 2k+k-\frac{3}{8} \geq 0, \\ 2k-k-\frac{3}{8} \geq 0, \end{cases}$$
 解得 $k \geq \frac{3}{8}$, 故 D 正确. 故选 BCD.

6. B 【解析】原不等式移项可得 $\frac{x^2+2x-2}{3+2x-x^2} - x \leq 0$, 即 $\frac{x^2+2x-2-x(3+2x-x^2)}{3+2x-x^2} \leq 0$, 整理得 $\frac{(x-2)(x^2+x+1)}{(x-3)(x+1)} \geq 0$, 因为 $x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ 恒成立, 所以原不等式等价于 $\frac{x-2}{(x-3)(x+1)} \geq 0$, 即 $(x-2)(x-3)(x+1) \geq 0$, 且 $x \neq -1$, $x \neq 3$, 利用“数轴穿根法”进行求解, 如图所示.



解得 $-1 < x \leq 2$ 或 $x \geq 3$, 故原不等式的解集为 $\{x | -1 < x \leq 2 \text{ 或 } x \geq 3\}$. 故选 B.

7. $\{V | 10 \leq V \leq 40\}$ 【解析】第一次操作后, 剩下的纯药液为 $V-10$, 第二次操作后, 剩下的纯药液为 $V-10-\frac{V-10}{V} \times 8$.

由题意可得 $V-10-\frac{V-10}{V} \times 8 \leq 0.6V$,

即 $V^2-45V+200 \leq 0$, 解得 $5 \leq V \leq 40$.

又 $V \geq 10$, 所以 $10 \leq V \leq 40$.

易错专训

易错点 1 不等式的解集要写成集合的形式

8. $\{x | -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$ 【解析】因为 $ax+b > 0$ 的解集为 $\left\{x \mid x < -\frac{1}{2}\right\}$, 所以 $-\frac{1}{2}a+b=0$, 且 $a < 0$, 故 $a=2b < 0$, 即 $b < 0$. 故 $bx^2-a > 0$ 可化为 $x^2-2 < 0$, 解得 $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$, 所以不等式 $bx^2-a > 0$ 的解集为 $\{x | -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$.

易错警示

由于不等式的解集是集合的形式, 因此在填空题中填写答案时, 一定要写成集合的形式, 如本题中若将答案写为 $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$, 则是错误的.

易错点 2 含参数的二次不等式要注意分类讨论

9. $\{m | -4 < m \leq 0\}$ 【解析】不等式 $mx^2-mx-1 \geq 0$ 的解集为 $\emptyset$ 等价于对任意的实数 $x \in \mathbf{R}$, 不等式 $mx^2-mx-1 < 0$ 恒成立. 当 $m=0$ 时, $-1 < 0$ 恒成立; 当 $m \neq 0$ 时, 要使不等式恒成立, 则需 $\begin{cases} m < 0, \\ m^2+4m < 0, \end{cases}$ 解得 $-4 < m < 0$. 综上, 实数 m 的取值范围是 $\{m | -4 < m \leq 0\}$.

易错警示

由于 $ax^2+bx+c < 0$ 不一定是二次不等式, 因此当 $ax^2+bx+c < 0$ 的解集为 $\mathbf{R}$ 时, 不但要考虑 $\begin{cases} a < 0, \\ \Delta = b^2-4ac < 0, \end{cases}$ 还要考虑 $a=b=0, c < 0$ 的特殊情况.

10. 【解】原不等式等价于 $(ax-1)(x-2)(x+1) > 0$. 当 $a=0$ 时, 原不等式等价于 $(x-2)(x+1) < 0$, 解得 $-1 < x < 2$, 此时原不等式的解集为 $\{x | -1 < x < 2\}$. 当 $a > 0$ 时, 原不等式等价于 $\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-2)(x+1) > 0$, 则当 $a=\frac{1}{2}$ 时, 原不等式的解集为 $\{x | x > -1 \text{ 且 } x \neq 2\}$. 当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 原不等式的解集为 $\left\{x \mid x > \frac{1}{a} \text{ 或 } -1 < x < 2\right\}$. 当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 原不等式的解集为 $\left\{x \mid x > 2 \text{ 或 } -1 < x < \frac{1}{a}\right\}$. 当 $a < 0$ 时, 原不等式等价于 $\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-2)(x+1) < 0$, 则当 $a=-1$ 时, 原不等式的解集为 $\{x | x < 2 \text{ 且 } x \neq -1\}$. 当 $-1 < a < 0$ 时, 原不等式的解集为 $\left\{x \mid x < \frac{1}{a} \text{ 或 } -1 < x < 2\right\}$. 当 $a < -1$ 时, 原不等式的解集为 $\left\{x \mid x < -1 \text{ 或 } \frac{1}{a} < x < 2\right\}$.

易错警示

对任何分式不等式都是通过移项、通分等一系列步骤, 把不等号一边化为 0, 再转化为整式不等式来解决. 解此分式不等式先要等价转化为整式不等式, 再对 $ax-1$ 中的 a 进行分类讨论求解, 还需用到“穿针引线法”. 本题在分类讨论中容易忽略 $a=0$ 的情况, 以及对 $\frac{1}{a}$, -1 和 2 的大小比较, 因此解含参数不等式时, 一要考虑参数总的取值范围; 二要用同一标准对参数进行划分, 做到不重不漏; 三要使划分后的不等式的解集的表达式是确定的.

易错点 3 解不等式时非等价变形而致误

11. $\{x | 2 < x \leq 12\}$ 【解析】原不等式等价于 $\frac{3x+4}{x-2} - 4 \geq 0$, 化简得

$$\frac{12-x}{x-2} \geq 0, \text{ 即 } \begin{cases} (12-x)(x-2) \geq 0, \\ x-2 \neq 0, \end{cases} \text{ 解得 } 2 < x \leq 12.$$

故原不等式的解集为 $\{x | 2 < x \leq 12\}$.

易错警示

本题的易错点在于分式变整式时, 两边同乘 $(x-2)$, 忽略分母不为零导致错误. 不等号右边不为零的分式不等式求解时应该移项、通分、化简, 整理成 $\frac{ax+b}{cx+d} \geq 0$ (c, d 不同时为 0) 的形式, 再化成整式不等式 $(ax+b)(cx+d) \geq 0$ 且 $cx+d \neq 0$ 求解.

第二章全章训练

1. B 【解析】因为 $a+b>4$ 不能推出 $a>1$ 且 $b>3$ (如 $a=-1, b=6$), 但 $a>1$ 且 $b>3$ 能推出 $a+b>4$, 所以“ $a+b>4$ ”是“ $a>1$ 且 $b>3$ ”的必要不充分条件. 故选 B.

2. C 【解析】解关于 x 的不等式 $x-\frac{a}{2}<1$, 得 $x<1+\frac{a}{2}$, 而关于 x 的不等式 $x-\frac{a}{2}<1$ 的解集为 $\{x|x<1\}$, 所以 $1+\frac{a}{2}=1$, 解得 $a=0$, 所以关于 x 的一元二次方程 $x^2+ax+1=0$ 的判别式 $\Delta=a^2-4=-4<0$, 所以关于 x 的一元二次方程 $x^2+ax+1=0$ 没有实数根. 故选 C.

3. A 【解析】因为 $x>1$, 所以 $x-1>0$, 所以 $\frac{1}{1-x}-x=(1-x)+\frac{1}{1-x}$
 $1=-1-\left[(x-1)+\frac{1}{x-1}\right] \leqslant -1-2\sqrt{(x-1) \cdot \frac{1}{x-1}}=-3$, 当且仅当 $x-1=\frac{1}{x-1}$ ($x>1$) 时, 即 $x=2$ 时等号成立, 所以当 $x>1$ 时, $\frac{1}{1-x}-x$ 的最大值为 -3 . 故选 A.

4. C 【解析】因为不等式 $ax^2-x+c>0$ 的解集为 $\{x|-2<x<1\}$, 所以
 以 $\begin{cases} a<0, \\ -2 \times 1 = \frac{c}{a}, \\ -2+1 = \frac{1}{a}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=-1, \\ c=2, \end{cases}$ 所以函数 $y=ax^2+x+c$ 为 $y=-x^2+x+2$. 令 $-x^2+x+2=0$, 解得 $x=-1$ 或 $x=2$, 故抛物线开口向下, 与 x 轴的交点的横坐标分别为 $-1, 2$. 故选 C.

5. B 【解析】由 $a-b=2+\sqrt{3}-\sqrt{7}$, 且 $(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}>7$, 得 $a-b>0$, 则 $a>b$; 由 $a-c=2+\sqrt{2}-\sqrt{6}$, 且 $(2+\sqrt{2})^2=6+4\sqrt{2}>6$, 得 $a-c>0$, 则 $a>c$; 由 $b-c=(\sqrt{7}+\sqrt{2})-(\sqrt{6}+\sqrt{3})$, 且 $(\sqrt{6}+\sqrt{3})^2=9+2\sqrt{18}>9+2\sqrt{14}=(\sqrt{7}+\sqrt{2})^2$, 得 $b-c<0$, 则 $c>b$. 所以 $a>c>b$. 故选 B.

6. B 【解析】因为“ $\exists x \in \mathbf{R}, ax^2-3ax+9 \leqslant 0$ ”是假命题, 所以它的否定“ $\forall x \in \mathbf{R}, ax^2-3ax+9>0$ ”是真命题. 当 $a=0$ 时, $9>0$ 恒成立;

→【圈】重点: 正难则反思想

当 $a \neq 0$ 时, 对任意 $x \in \mathbf{R}, ax^2-3ax+9>0$ 恒成立, 则不等式对应的二次函数的图象开口向上, 即 $a>0$, 且判别式 $\Delta=(-3a)^2-4 \times a \times 9<0$, 即 $9a^2-36a=9a(a-4)<0$, 解得 $0<a<4$. 综上所述, a 的取值范围为 $\{a|0 \leqslant a<4\}$. 故选 B.

方法提炼 一元二次型不等式恒成立的解法

(1) 不等式 $ax^2+bx+c>0$ 对任意实数 x 恒成立等价于
 $\begin{cases} a=b=0, \\ c>0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a>0, \\ b^2-4ac<0; \end{cases}$

(2) 不等式 $ax^2+bx+c<0$ 对任意实数 x 恒成立等价于
 $\begin{cases} a=b=0, \\ c<0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a<0, \\ b^2-4ac<0. \end{cases}$

题中若明确说明是一元二次不等式, 则 $a \neq 0$; 若未明确说明是一元二次不等式, 则要考虑 $a=0$ 的情况.

7. A 【解析】设毛诗有 x 本, 春秋有 y 本, 周易有 z 本, 学生人数

$$\text{为 } m, x, y, z, m \in \mathbf{N}^*, \text{ 则 } \begin{cases} x+y+z=94, \\ \frac{m}{x}=3, \\ \frac{m}{y}=4, \\ \frac{m}{z}=5, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} m=120, \\ x=40, \\ y=30, \\ z=24. \end{cases} \text{ 故选 A.}$$

8. A 【解析】根据题意, 正实数 x, y, z 满足 $x^2-xy+4y^2-z=0$, 则
 $z=x^2-xy+4y^2$,

$$\text{所以 } \frac{xy}{z} = \frac{xy}{x^2-xy+4y^2} = \frac{1}{\frac{x}{y}-1+\frac{4y}{x}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{4y}{x}}-1} = \frac{1}{3},$$

当且仅当 $\frac{x}{y} = \frac{4y}{x}$, 即 $x=2y$ 时等号成立, 则此时 $z=x^2-xy+4y^2=6y^2$,

$$\text{当 } \frac{xy}{z} \text{ 取得最大值时, } \frac{2}{x} + \frac{1}{y} - \frac{3}{z} = \frac{2}{2y} + \frac{1}{y} - \frac{3}{6y^2} = -\frac{1}{2y^2} + \frac{2}{y} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}-2\right)^2+2,$$

分析可得, 当 $\frac{1}{y}=2$, 即 $y=\frac{1}{2}$ 时, $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} - \frac{3}{z}$ 取得最大值 2. 故选 A.

9. ABC 【解析】由题意得 $a<-b<0, 0<b<-a$, 所以 $b \cdot b < -a \cdot b, a \cdot a > -b \cdot a, 0 < b^2 < (-a)^2$, 即 $b^2 < -ab, a^2 > -ab, a^2 > b^2$, 故选 ABC.

10. AC 【解析】由 $k^2+10k+21=(k+7)(k+3) \leqslant 0$, 解得 $-7 \leqslant k \leqslant -3$. 对于 A, 由 $-8 \leqslant k \leqslant -1$ 不能推出 $-7 \leqslant k \leqslant -3$, 而 $-7 \leqslant k \leqslant -3$ 可以推出 $-8 \leqslant k \leqslant -1$, 故 A 正确; 对于 B, 由 $-7 \leqslant k \leqslant -5$ 能推出 $-7 \leqslant k \leqslant -3$, 故 B 错误; 对于 C, 由 $-9 \leqslant k \leqslant -2$ 不能推出 $-7 \leqslant k \leqslant -3$, 由 $-7 \leqslant k \leqslant -3$ 可以推出 $-9 \leqslant k \leqslant -2$, 故 C 正确; 对于 D, 由 $-6 \leqslant k \leqslant -4$ 能推出 $-7 \leqslant k \leqslant -3$, 故 D 错误. 故选 AC.

11. BC 【解析】对于 A, $y=x(4-3x)=-3x^2+4x=-3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{4}{3}$, 显然 $x=\frac{2}{3}$ 时取得最大值, 故 A 正确;

对于 B, 由 $x<-1$, 得 $x+1<0$, 则 $x+\frac{1}{x+1}=(x+1)+\frac{1}{x+1}-1=$

$$-\left[-(x+1)+\frac{1}{-(x+1)}\right]-1 \leqslant -2\sqrt{-(x+1) \cdot \frac{1}{-(x+1)}}-1=$$

-3 , 当且仅当 $-(x+1)=\frac{1}{-(x+1)}$, 即 $x=-2$ 时等号成立, 故 B 错误;

$$\text{对于 C, } y = \frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}} = \sqrt{x^2+4} + \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \geq$$

$$2\sqrt{\sqrt{x^2+4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}} = 2,$$

当且仅当 $\sqrt{x^2+4} = 1$ 时等号成立, 而 $\sqrt{x^2+4} \geq 2$, 故 $y = \frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$ 取不到最小值 2, 故 C 错误;

对于 D, 因为 $a > 0, b > 0$, 且 $a+b=2$,

$$\text{所以 } \frac{1}{a} + \frac{2}{b} = \frac{1}{2}(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} \right) = \frac{1}{2} \left(3 + \frac{b}{a} + \frac{2a}{b} \right) \geq$$

$$\frac{1}{2} \left(3 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{2a}{b}} \right) = \frac{3+2\sqrt{2}}{2}, \text{ 当且仅当 } \frac{b}{a} = \frac{2a}{b}, \text{ 即 } a =$$

$2(\sqrt{2}-1), b = 2(2-\sqrt{2})$ 时等号成立, 故 D 正确.

故选 BC.

12. $\{3a-b|-2 \leq 3a-b \leq 7\}$ 【解析】设 $3a-b=x(a+b)+y(a-b)=(x+y)a+(x-y)b$, 则

$$\begin{cases} x+y=3, \\ x-y=-1, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=1, \\ y=2, \end{cases}$$

所以 $3a-b=(a+b)+2(a-b)$.

因为 $2 \leq a+b \leq 5, -2 \leq a-b \leq 1$,

所以 $-2 \leq (a+b)+2(a-b) \leq 7$,

即 $3a-b$ 的取值范围是 $\{3a-b|-2 \leq 3a-b \leq 7\}$.

13. $8\sqrt{2}-4$ 【解析】因为 $ab+2a+b=14$, 所以 $ab+2a+b+2=16$, 化简可得 $(a+1)(b+2)=16$. 因为 $a > 0, b > 0$, 所以 $2a+b=2(a+1)+(b+2)-4 \geq 2\sqrt{(a+1)(b+2)}-4=8\sqrt{2}-4$. 当且仅当 $2(a+1)=b+2$, 即 $a=2\sqrt{2}-1, b=4\sqrt{2}-2$ 时等号成立, 此时 $2a+b$ 取得最小值 $8\sqrt{2}-4$.

14. $\left\{x \mid x \leq \frac{2}{3} \text{ 或 } x \geq 1\right\}$ $\{a|-2 \leq a \leq 2\}$ 【解析】若 $a=-3$, 则

不等式 $(ax+2)(x-1) \leq 0$ 即为 $(-3x+2)(x-1) \leq 0$,

解得 $x \leq \frac{2}{3}$ 或 $x \geq 1$, 即该不等式的解集是 $\left\{x \mid x \leq \frac{2}{3} \text{ 或 } x \geq 1\right\}$.

若对任意的 $-1 \leq x \leq 1$, 不等式 $(ax+2)(x-1) \leq 0$ 恒成立,

当 $x=1$ 时, $(ax+2)(x-1)=0$, 此时 $a \in \mathbf{R}$,

当 $-1 \leq x < 1$ 时, $x-1 < 0$, 不等式 $(ax+2)(x-1) \leq 0$ 可化为 $ax+2 \geq 0$, 即当 $-1 \leq x < 1$ 时, $ax+2 \geq 0$ 恒成立, 有

$$\begin{cases} -a+2 \geq 0, \\ a+2 \geq 0, \end{cases} \text{ 解得 } -2 \leq a \leq 2.$$

所以对任意的 $-1 \leq x \leq 1$, 不等式 $(ax+2)(x-1) \leq 0$ 恒成立, 实数 a 的取值范围是 $\{a|-2 \leq a \leq 2\}$.

15. 【解】(1) 因为 $(a-2)(a-6)-(a-3)(a-5)=(a^2-8a+12)-(a^2-8a+15)=-3 < 0$,

所以 $(a-2)(a-6) < (a-3)(a-5)$.

(2) 由 $2 < x < 3, 2 < y < 3$, 得 $4 < 2y < 6$, 故 $6 < x+2y < 9$.

$$\text{又 } \frac{1}{3} < \frac{1}{y} < \frac{1}{2}, \text{ 故 } \frac{2}{3} < \frac{x}{y} < \frac{3}{2}.$$

16. 【证明】(1) $\because a+b=1, a > 0, b > 0$,

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{a+b}{ab} = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 2\left(\frac{a+b}{a} + \frac{a+b}{b}\right) =$$

$$2\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + 4 \geq 4+4=8, \text{ 当且仅当 } a=b=\frac{1}{2} \text{ 时取等号,}$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} \geq 8.$$

$$(2) \because \left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) = 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab}, \text{ 由(1)知, } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} +$$

$$\frac{1}{ab} \geq 8, \text{ 当且仅当 } a=b=\frac{1}{2} \text{ 时取等号,}$$

$$\therefore 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} \geq 9, \therefore \left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) \geq 9.$$

17. 【解】(1) 由题意, 得 $0.15(1+0.25x)(10-x) \geq 0.15 \times 10$,

整理得 $x^2-6x \leq 0$, 解得 $0 \leq x \leq 6$, 又 $x > 0$, 所以 $0 < x \leq 6$, 故 x 的取值范围为 $\{x|0 < x \leq 6\}$.

(2) 由题意知网店销售的利润为 $0.15(a-0.875x)x$ 万元, 技术指导后, 养羊的利润为 $0.15(1+0.25x)(10-x)$ 万元, 则 $0.15(a-0.875x)x \leq 0.15(1+0.25x)(10-x)$ 恒成立.

又 $0 < x < 10$, 则 $a \leq \frac{5x}{8} + \frac{10}{x} + 1.5$ 恒成立. 又 $\frac{5x}{8} + \frac{10}{x} \geq$

$$2\sqrt{\frac{5x}{8} \cdot \frac{10}{x}} = 5, \text{ 当且仅当 } x=4 \text{ 时, 等号成立, 所以 } a \leq$$

6.5, 又 $a > 0$, 所以 $0 < a \leq 6.5$, 则 a 的最大值为 6.5.

18. 【解】(1) 由题意可知, $\Delta = 4(m+2)^2 - 4(m^2-1) \geq 0$, 可

得 $m \geq -\frac{5}{4}$, 由根与系数的关系可得 $x_1+x_2=2(m+2)$,

$$x_1x_2=m^2-1,$$

$$\text{所以 } x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=[2(m+2)]^2-2(m^2-1)=2m^2+16m+18=4,$$

解得 $m=-1$ 或 -7 (舍去), 故 m 的值为 -1 .

$$(2) \text{ 当 } m=1 \text{ 时, } x_1+x_2=2(m+2)=6, \text{ 所以 } a+b=\frac{x_1+x_2}{2}=3,$$

$$\text{因为 } a > 0, b > 0, \text{ 所以 } \frac{1}{a} + \frac{4}{b} = \frac{1}{3}(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b} \right) =$$

$$\frac{1}{3} \left(1 + \frac{4a}{b} + \frac{b}{a} + 4 \right) \geq \frac{1}{3} \left(5 + 2\sqrt{\frac{4a}{b} \cdot \frac{b}{a}} \right) = \frac{1}{3} \times (5+2\sqrt{4}) = 3,$$

当且仅当 $\frac{b}{a} = \frac{4a}{b}$, 即 $a=1, b=2$ 时等号成立, 所以 $\frac{1}{a} + \frac{4}{b}$ 的

最小值为 3.

$$(3) \text{ 因为 } x_1, x_2 \text{ 是两个不相等的正数, 所以 } \begin{cases} \Delta > 0, \\ x_1+x_2=2(m+2) > 0, \\ x_1 \cdot x_2=m^2-1 > 0, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} m > -\frac{5}{4}, \\ m > -2, \\ m > 1 \text{ 或 } m < -1, \end{cases} \text{ 所以 } m > 1 \text{ 或 } -\frac{5}{4} < m < -1,$$

所以实数 m 的取值范围是 $\left\{m \mid m > 1 \text{ 或 } -\frac{5}{4} < m < -1\right\}$.

19. 【解】(1) 由题意知, $1, c(c \geq 1)$ 是方程 $bx^2 - 3x + 2 = 0$ 的两根, 由 $b - 3 + 2 = 0$, 得 $b = 1$, 由 $x^2 - 3x + 2 > 0$ 得 $x < 1$ 或 $x > 2$, 则 $c = 2$. 故 $b = 1, c = 2$.

(2) 原不等式可化为 $ax^2 - (2a+1)x + 2 < 0 \Rightarrow (ax-1)(x-2) < 0$.

若 $a = 0$, 则 $-x + 2 < 0$, 解得 $x > 2$.

若 $a < 0$, 则 $\left(x - \frac{1}{a}\right)(x-2) > 0$, 解得 $x < \frac{1}{a}$ 或 $x > 2$.

若 $a > 0$, 则 $\left(x - \frac{1}{a}\right)(x-2) < 0$,

当 $\frac{1}{a} < 2$, 即 $a > \frac{1}{2}$ 时, 解得 $\frac{1}{a} < x < 2$;

当 $\frac{1}{a} = 2$, 即 $a = \frac{1}{2}$ 时, 不等式的解集为 $\emptyset$;

当 $\frac{1}{a} > 2$, 即 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 解得 $2 < x < \frac{1}{a}$.

综上所述, 当 $a < 0$ 时, 不等式的解集为 $\left\{x \mid x < \frac{1}{a} \text{ 或 } x > 2\right\}$;

当 $a = 0$ 时, 不等式的解集为 $\{x \mid x > 2\}$;

当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 不等式的解集为 $\left\{x \mid 2 < x < \frac{1}{a}\right\}$;

当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 不等式的解集为 $\emptyset$;

当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 不等式的解集为 $\left\{x \mid \frac{1}{a} < x < 2\right\}$.

(3) 问题转化为 $(m+1)x^2 - (m-1)x + m - 1 \geq 0$ 对一切 $-\frac{1}{2} \leq$

$x \leq \frac{1}{2}$ 恒成立,

所以 $m(x^2 - x + 1) + x^2 + x - 1 \geq 0 \Rightarrow m(x^2 - x + 1) \geq -(x^2 + x - 1)$.

因为 $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ 恒成立,

所以 $m \geq -\frac{x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1} \left(-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}\right)$.

$-\frac{x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1} = -\frac{(x^2 - x + 1) + 2(x - 1)}{x^2 - x + 1} = -1 - \frac{2(x - 1)}{x^2 - x + 1}$,

设 $x - 1 = t$, 则 $x = t + 1 \left(-\frac{3}{2} \leq t \leq -\frac{1}{2}\right)$,

且 $-1 - \frac{2t}{(t+1)^2 - (t+1) + 1} = -1 - \frac{2t}{t^2 + t + 1} = -1 - \frac{2}{t + \frac{1}{t} + 1} =$

$-1 + \frac{2}{-t + \frac{1}{-t} - 1}$,

因为 $-t + \frac{1}{-t} \geq 2\sqrt{-t \cdot \frac{1}{(-t)}} = 2$, 当且仅当 $t = -1$ 时取 "=",

所以 $-t + \frac{1}{-t} - 1 \geq 1$, 所以 $\frac{2}{-t + \frac{1}{-t} - 1} \leq 2$, 所以 $-1 +$

$\frac{2}{-t + \frac{1}{-t} - 1} \leq 1$.

所以 $m \geq 1$, 故实数 m 的取值范围是 $\{m \mid m \geq 1\}$.

第三章 函数的概念与性质

3.1 函数的概念及其表示

3.1.1 函数的概念

基础必刷

1. D 【解析】对于 A, 定义域为 $[0, 1]$, 值域为 $[0, 1]$, 与条件矛盾, A 错误;

对于 B, 定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $[0, 1]$, 与条件矛盾, B 错误;

对于 C, 有一个自变量 x 对应两个 y 值的情况, 不是函数, 与条件矛盾, C 错误;

对于 D, 定义域为 $[-1, 0]$, 值域为 $[-1, 1]$, 符合条件, D 正确. 故选 D.

方法精练

判断函数图象需要注意以下几点

(1) 在定义域内每个 x 都要有对应的函数值 y ;

(2) 一个 x 不能对应多个 y , 即画一条与 x 轴垂直的直线, 直线与函数图象至多有一个交点;

(3) 函数值不能超出给定函数值的集合.

2. AD 【解析】对于 A, 由于实数包含所有的整数, 故 A 中的每个元素在 B 中都有唯一的元素与之对应, 符合函数的定义, 故 A 正确; 对于 B, 当在 A 中取非整数的元素时, 在集合 B

中没有元素与之对应, 不符合函数的定义, 故 B 错误; 对于 C, 若取 $4 \in A$, 又 $(\pm 2)^2 = 4$, 所以有两个 y 和一个 x 对应, 不符合函数的定义, 故 C 错误; 对于 D, 由图可知对于 A 中的所有元素, 在集合 B 中都有唯一的元素与之对应, 符合函数的定义, 故 D 正确. 故选 AD.

3. C 【解析】由题意得 $\begin{cases} 2+x \geq 0, \\ 16-x^2 > 0, \end{cases}$ 解得 $-2 \leq x < 4$, 故定义域为 $[-2, 4)$. 故选 C.

4. B 【解析】由函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + a$, 可得其图象的对称轴为直线 $x = 1$,

$\therefore$ 函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + a$ 的定义域和值域均为 $[1, b]$ ($b >$

1), 作出函数 $f(x)$ 的大致图象如图所示,

